QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

1. Soit I un point quelconque. L'homothétie $h(I, -4)$ est une

☐ similitude indirecte de rapport 4. ☐ similitude directe de rapport 4 et d'angle nul. ☐ similitude directe de rapport 4 et d'angle π

2. Soit I et J deux points distincts. L'application $h(I, 2) \circ h\left(J, \frac{1}{2}\right)$ est

☐ une translation. ☐ une homothétie. ☐ l'identité.

3. L'image par une similitude de rapport $\frac{1}{2}$, d'un triangle d'aire $\mathcal{A}$ est un triangle dont l'aire est égale à

☐ $\mathcal{A}$. ☐ $4\mathcal{A}$. ☐ $\frac{\mathcal{A}}{4}$.

4. Soit Ω un point quelconque. L'application $r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, -2)$ est une similitude directe dont la forme réduite est

☐ $r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$. ☐ $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$. ☐ $r\left(\Omega, -\frac{5\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$.

5. Soit f la similitude indirecte de centre I, de rapport 2 et d'axe Δ. L'application $f \circ f$ est

☐ La similitude indirecte de centre I, de rapport 4 et d'axe Δ ☐ l'homothétie $h(I, 4)$. ☐ La similitude directe de centre I, de rapport 4 et d'angle π

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Une similitude directe qui fixe deux points distincts est l'identité.
2. La composée d'une similitude directe de rapport 2 et d'un antidéplacement est une similitude indirecte de rapport 2.
3. La composée d'une similitude directe de rapport 4 et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{4}$ est un déplacement.
4. La réciproque d'une similitude directe de centre I, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est la similitude directe de centre I, de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
5. Soit A, B, C et D des points tels que $A \neq C$ et $B \neq D$.
   Soit f la similitude indirecte qui envoie A sur B et C sur D. L'application $f \circ S_{(AC)}$ est une similitude directe de même rapport que f qui envoie A sur B et C sur D.

Exercices et problèmes

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit ABC un triangle équilatéral de centre G tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Déterminer, dans chacun des cas, le rapport et l'angle de la similitude directe f.
a. f fixe B et envoie A sur C.
b. f fixe B et envoie C sur G
c. f fixe G et envoie B sur C.

2 1. Soit S une similitude directe. Donner la nature de $S \circ f \circ S^{-1}$ dans chacun des cas ci-dessous.
a. f est une translation de vecteur non nul.
b. f est une rotation d'angle non nul.
c. f est une homothétie de rapport différent de 1.
d. f est une symétrie orthogonale d'axe passant par le centre de S.
2. Reprendre la question précédente en supposant que S est une similitude indirecte.

3 Soit ABCD un carré de côté 1, de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note I le milieu de [AO].
1. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui envoie A sur O et B sur I.
b. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. a. Donner l'écriture complexe de S dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
b. Déterminer le centre de S.

4 Soit ABC un triangle non isocèle , rectangle en A et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC) et on note f la similitude directe qui envoie B sur A et A sur C.
1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
2. Soit M un point variable de [AB]. La perpendiculaire à (MH) menée de H coupe [AC] en N. Montrer que le cercle de diamètre [MN] passe par un point fixe.

5 Soit ABCD un carré de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit S la similitude directe de centre D qui envoie O sur C.
1. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. Déterminer l'image du point A par S.
3. Construire l'image du point C par S.

6 Soit un triangle direct ABC et M un point du plan.
Soit S la similitude directe de centre A qui envoie B sur C.
Construire l'image de M dans chacun des cas ci-dessous.
1. Le point M n'appartient pas à (AB).
2. Le point M appartient à la droite (AB) privée des points A et B.

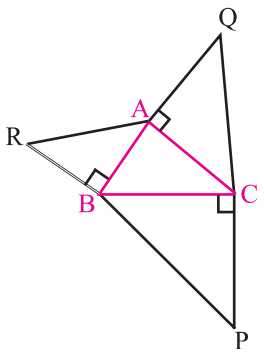
7 Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à C.
1. a. Préciser le rapport et l'angle de la similitude directe S qui envoie A' sur C et C sur B.
b. Déterminer l'image par S de la droite (AC).
2. a. Soit I le centre de S. Montrer que le triangle ICB est rectangle isocèle.
b. Construire I.
c. Construire l'image du cercle de centre C et de rayon CA.

8 Soit ABCD un carré direct de centre O.
1. a. Préciser l'angle et le rapport de la similitude directe S qui envoie A sur O et B sur D.
b. Construire le centre de f.
c. Déterminer $S(D)$.
2. Existe-t-il une similitude directe qui envoie A sur O, B sur D et D sur C ?

9 Soit A et B deux points. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport -2 et par r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $S = r \circ h$.
1. Montrer que S est une similitude directe et déterminer son rapport et son angle.
2. Soit O le centre de la similitude S et $A' = r(A)$.
a. Montrer que $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OA'}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OA' = 2OA$.
b. Construire le point O.
3. Soit $B' = h(B)$.
Construire le centre de la similitude $S' = h \circ r$ et préciser son angle et son rapport.

Exercices et problèmes

10 Dans la figure ci-dessous le triangle ABR est isocèle et rectangle en B, le triangle BCP est isocèle et rectangle en C et le triangle CAQ est isocèle et rectangle en A.



On note respectivement par S_P , S_Q et S_R les similitudes directes de centres P, Q et R.
On suppose de plus que les trois similitudes sont de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit $f = S_R \circ S_P \circ S_Q$.

1. Déterminer $f(A)$.
2. Préciser f et donner ses éléments caractéristiques.

11 Soit O et B deux points distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OB]$.
Soit A un point du segment $[OB]$ distinct de O et B et I le milieu de $[AB]$.
La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et M′ tels que $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).

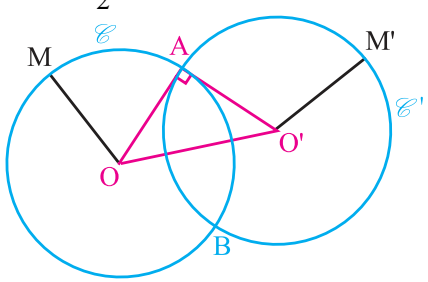
1. a. Quelle est la nature du quadrilatère AMBM′ ?
b. En déduire que la droite (AM′) est orthogonale à (OM) et que les points N, A et M′ sont alignés.
2. On désigne par S la similitude de centre N qui envoie M sur A.
a. Déterminer l'angle de S.
b. Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA).
c. En déduire l'image par S de M′.
d. Déterminer l'image I′ de I par S.
e. Montrer que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

12 Soit un triangle AH′ isocèle en H et tel que $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AH'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et M un point de la droite (H′) et M′ le point tel que le triangle AMM′ soit isocèle en M avec $(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. Préciser la similitude directe de centre A, qui envoie M sur M′.
2. Quel est l'ensemble E des points M′ lorsque M décrit (H′) ?
3. Soit J le milieu de $[MM']$. Calculer $\frac{AJ}{AM}$ et montrer que $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AJ})$ ne dépend pas du point M.
4. Quel est l'ensemble F des points J lorsque M décrit (H′) ? Construire F.

13 Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
1. Montrer que le triangle ABH est l'image du triangle CAH par une similitude directe que l'on déterminera.
2. Montrer que le triangle HAC est l'image du triangle ABC par la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.
3. Par quelle transformation peut-on passer du triangle ABC au triangle HA ?

14 dans la figure ci-dessous AOO′ est un triangle rectangle et isocèle en A, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O passant par A et $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O′ passant par A, les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se recoupent en B, M est un point de $\mathscr{C}$ et M′ est le point de $\mathscr{C}'$ tel que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.



1. Préciser la similitude directe qui envoie O sur O′ et M sur M′.
2. Si M est distinct de B et de $S_O(B)$, la droite (MB) recoupe $\mathscr{C}'$ en un point N′ et la droite (BM′) recoupe $\mathscr{C}$ en N.
Montrer que BN = BN′ et que les droites (BN) et (BN′) sont perpendiculaires.
3. Soit les carrés MBM′P et NBN′Q.
a. Quel est l'ensemble des points P et l'ensemble des points Q lorsque M varie ?
b. Montrer que la droite (PQ) passe par un point fixe.

Exercices et problèmes

15 Soit la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = 2iz + 3 - i$.

1. Soit B le point d'affixe i et C le point d'affixe -1. On désigne par B′ et C′ les images respectives de B et C par f. Déterminer $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right)$ et exprimer B′C′ en fonction de BC.
2. Identifier f et donner ses éléments caractéristiques.

16 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A(3, −1) et B(0, 2). On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$, r la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

On pose $f = t \circ r \circ h$.

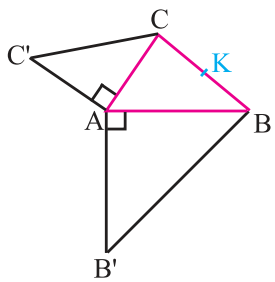
1. a. Caractériser $t \circ r$.
   b. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
   c. Donner l'écriture complexe de f.
2. Déterminer et construire le point K tel que $f(K) = O$.

17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -1 + 6i$.

1. Montrer qu'il existe une rotation qui transforme A en B et C en D.
   Préciser ses éléments caractéristiques.
3. On désigne par J le point d'affixe $3 + 5i$.
   Montrer que la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On désigne par I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
   Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD soient des carrées.
   a. Calculer z_P et z_Q, les affixes respectives des points P et Q.
   b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right)$.
   En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
   c. En déduire que J est l'image de M par g et que J est le milieu de [PQ].

18 Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle quelconque, AB′B et ACC′ sont directs, rectangles, isocèles de sommet A et K est le milieu de [BC].

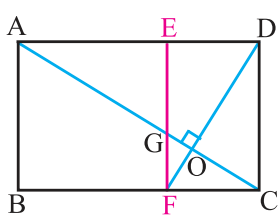


Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A. On note a, b et c les affixes des points A, B et C.

1. Exprimer les affixes k, b′ et c′ des points K, B′ et C′ en fonction de b et c.
2. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui envoie A sur B′ et K sur C′.
3. a. Donner les éléments caractéristiques de f, son expression complexe ainsi que sa forme réduite.
   b. En déduire que les droites (AK) et (B′C′) sont perpendiculaires.

19 Un rectangle d'or est un rectangle dont le quotient longueur/largeur est égal à $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

La figure ci-dessous représente un rectangle d'or ABCD et un carré ABFE.



1. Vérifier que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. En déduire que EFCD est un rectangle d'or.
2. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et D sur C. Préciser son rapport et son angle.

3. Quelle est l'image de C par f ?
4. En déduire que l'intersection O de (AC) et (DF) est invariant par f.
5. Montrer que les droites (AC) et (DF) sont perpendiculaires et que si G désigne l'intersection de (AC) et (EF) alors $ED = EG$.

20 On considère un rectangle ABCD tel que $AD = 1$, $AB = 2$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par L, K et J les milieux respectifs de $[AD]$, $[DC]$ et $[BC]$.

On munit le plan du repère $(D, \overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DA})$.

1. Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte f qui envoie A sur D et C sur B.
2. a. Déterminer $f(L)$ et $f(J)$.

b. Donner les éléments caractéristiques de f.

21 Soit ABC un triangle équilatéral direct .On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique de A par rapport à C.

1. Soit f l'antidéplacement tel que $f(C) = A$ et $f(A) = B$. Identifier f.
2. Soit g la similitude directe telle que $g(B) = D$ et $g(I) = C$.

Montrer que $g(A) = A$ et déterminer les éléments caractéristiques de g.

3. Soit K le point défini par $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

a. Donner la nature de $f \circ g$.

b. Déterminer $f \circ g(I)$ et $f \circ g(A)$.

c. vérifier que $\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$.

En déduire que $f \circ g(K) = K$

d. Déterminer le rapport de $f \circ g$.

e. Montrer que l'axe de la similitude $f \circ g$ est la perpendiculaire en K à la droite (AB).

22 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la similitude indirecte f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)\bar{z} + i$.

Déterminer le centre et l'axe de f.

23 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la similitude indirecte f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -5i\bar{z} + 1 + i$.

1. Déterminer le centre et l'axe de f.
2. Déterminer l'image par f du cercle de centre I d'affixe $3+i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

24 On considère un rectangle OABC tel que $OA = 2OC$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La médiatrice D du segment $[OB]$ coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en H'.

Soit J et J' les symétriques respectifs du point O par rapport à I et H'.

1. a. Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.

b. En déduire que les points B, J et J' sont alignés.

2. Soit f la similitude directe qui envoie J sur O et O sur J'.

a. Déterminer l'angle de f.

b. Déterminer $f(B)$ et en déduire le centre et le rapport de f.

3. Soit g la similitude indirecte qui envoie J sur O et O sur J'.

a. Donner le rapport de g.

b. En déduire que g admet un unique point invariant que l'on notera I.

c. Montrer que le point I appartient à (JJ').

d. Construire le centre et l'axe de g.

25 On considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par K le milieu de $[AB]$.

1.a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie B sur A et A sur C.

b. Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

c. Soit D le symétrique de B par rapport à I. Montrer que $f(C) = D$.

d. Soit $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à C.

2. Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et I sur D.

a. Déterminer le rapport et l'angle de S.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre $[D]$. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en I et en un autre point Ω.
Montrer que Ω est le centre de S.
3. Soit $g = f \circ S$. Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques.

26 On considère un triangle isocèle ABC direct de sommet principal A. On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 2\alpha \ [2\pi]$, où α est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On désigne par O le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à O.
Soit I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).
1. Soit f la similitude directe qui envoie O sur I et D sur J
Déterminer à l'aide de α, l'angle et le rapport de f.
Montrer que $f(A) = A$.
2. On désigne par E le symétrique de O par rapport à I.
Montrer que $f(B) = O$ et $f(C) = E$.
Déterminer $\frac{OE}{BC}$.
3. Soit g la similitude indirecte qui envoie B sur O et C sur E.
a. Déterminer le rapport de g et l'image de O par g.
b. Montrer que $g = S_{(OE)} \circ f$.
4. Soit Ω le centre de g.
a. Montrer que $g \circ g(D) = J$ et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ).
b. Montrer que Ω appartient à la droite (BI).
c. Construire Ω.

27 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$.
La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en O.
On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de $[OA]$.
1. a. Faire une figure.
b. Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de $[AB]$.
2. Soit f la similitude directe telle que $f(B) = O$ et $f(H) = H'$.
a. Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.
b. Montrer que H' est le milieu du segment $[Of(A)]$.
En déduire que A est le centre de f.
3. Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AO]$ se recoupent en D.
a. Montrer que les points B, O et D sont alignés.
b. Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que $f(C) = D$.
c. Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.
4. Soit $g = S_{(DH)} \circ f$, où $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH).
a. Déterminer g(A) et g(C).
b. Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
c. Soit Ω le centre de g.
Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega D}$.
Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

QCM :

1) h (I,-4) est une similitude directe de rapport 4 d'angle π.

2) h(I,2) oh(J,$\frac{1}{2}$) est une translation.

3) L'image par une similitude de rapport ½ d'un triangle d'aire A est un triangle d'aire $\frac{A}{4}$.

4) r(Ω,$\frac{\pi}{6}$) oh(Ω,-2) = r(Ω, $-\frac{5\pi}{6}$) oh(Ω ,2)

5) fof = h(I,4)

VRAI-FAUX :

1) Vrai :en effet : une similitude directe qui fixe deux points distincts est un déplacement.
Un déplacement qui fixe deux points distincts est l'identité du plan.

2) Vrai : en effet : un antidéplacement est une similitude indirecte de rapport 1.
* la composée d'une S.d de rapport 2 est une S.I de rapport 1 est une similitude indirecte de rapport 2×1=2.

3) Faux : la composée d'une S.D de rapport 4 est d'une S.I de rapport $\frac{1}{4}$ est une similitude indirecte de rapport $4\times\frac{1}{4}$= 1 d'où c'est un antidéplacement.

4) Faux : si f es une similitude de rapport 3 alors f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{3}$.

5) Vrai : $S_{(AC)}$ est une S.I de rapport 1⟹ f_0 $S_{(AC)}$ est S. directe de même rapport que f.et on a : f_0 $S_{(AC)}$(A)=B
f_0 $S_{(AC)}$(C)=D

EXERCICE 1 :

a) $\begin{cases} f_{(B)=B} \\ f_{(A)=C} \end{cases}$

f est de rapport $\frac{BC}{BA}$=1 d'angle $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\Longrightarrow f = \text{rot}(B, -\frac{\pi}{3})$

b) $\begin{cases} f_{(B)=B} \\ f_{(C)=G} \end{cases}$ soit $I = A * C$ f est de rapport k= $\frac{BG}{BC} = \frac{2}{3}\frac{BI}{BC} \Rightarrow$k= 2/3cos$\frac{\pi}{6}$ =$\frac{1}{\sqrt{3}}$ d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{6}(2\pi)$

$\Longrightarrow f = s(B,\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6})$

c) $\begin{cases} f_{(G)=G} \\ f_{(B)=C} \end{cases}$

k=$\frac{GC}{GB}$=1, θ=$(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC})$ (2π)

$\theta = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$

$f = rot(G,\frac{2\pi}{3})$

EXERCICE 2:

1) Soit k: le rapport de S et θ son angle
S^{-1} est une S.d de rapport $\frac{1}{k}$ d'angle $-\theta$.

a) f = t $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$
S o f est une similitude diecte de rapport k × 1= k d'angle θ.
⟹ S o foS^{-1} est une S. directe de rapport $\frac{1}{k}$ × k=1 d'angle nul d'où S o foS^{-1} est une translation.

b) f est rotation d'angle $\propto$ non nul.
S o f est S.d de rapport k d'angle ($\propto+\theta$).
⟹ S o f o S^{-1} est une S.d de rapport 1 d'angle $\theta+\propto -\theta=\propto(2\pi)$ d'où S o foS^{-1} est une rotation d'angle $\propto$.

c) f : homothétie de rapport $\lambda \neq 1$

1er cas λ=-1⟶ f= symétrie centrale
⟶ f est une rotation d'angle π d'où S o f o S^{-1} est une rotation d'angle π
S o f o S^{-1} : symétrie centrale.

2ème cas : $\lambda \neq$-1 f est une S. directe de rapport |λ |d'angle nul ou π.

$S \circ f \circ S^{-1}$ est une S. directe de rapport $|\lambda|$de même angle que f.

$\Rightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une homothétie de même rapport que f.

d) $f = S_\Delta$ avec Δ passe par le centre wde S.

$S \circ f \circ S^{-1}$ est un antidéplacement qui fixe w.

$\Rightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une symétrie orthogonale d'axe passant par w.

2) S : Similitude indirecte de rapport k.

a) f : translation de vecteur non nul.

$S \circ f$ est une S.indirecte de rapport k.1=k

$\Rightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une S.directe de rapport $k.\frac{1}{k}=1$

$\Rightarrow S \circ f \circ S^{-1}$: déplacement

b) f = rotation d'angle $\propto \neq 0\ (2\pi)$

$S \circ f$ est une similitude indirecte de rapport $k \times 1 = k$.

$\Rightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est une S. directe de rapport $k \times \frac{1}{k} = 1$.

$\Rightarrow$ $S \circ f \circ S^{-1}$ est un déplacement

c) f = homothétie de rapport $\lambda \neq 1$

$S \circ f \circ S^{-1}$ est une homothétie de même rapport.

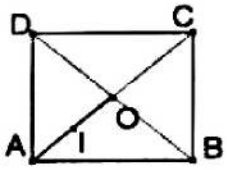
d) $f = S_\Delta$, $w \in \Delta$.

$S \circ f \circ S^{-1}$ est un anti-déplacement.

$S \circ f \circ S^{-1}(w) = w$

$S \circ f \circ S^{-1}$ est une symétrie orthogonale.

EXERCICE 3 :



1)a) AB≠0 et OI≠0 d'où il existe une unique similitude directe S tels que S(A)=0 et S(B)=I

b) $\frac{OI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AO}{AB} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OI}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OI})\ (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \pi\ (2\pi)$

$\equiv -3\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

S est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $(-3\frac{\pi}{4})$

2) a) R=(A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$)

$z_{A=0}$ $\quad z_{0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$

$z_{B=1}$ $\quad z_I = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

L'écriture complexe de S est de la forme z'=az+b

$\begin{cases} S_{(A)} = 0 \\ S_{(B)} = I \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_0 = a.z_A + b \\ z_I = a.z_B + b \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ a + b = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} b = \frac{1}{2}(1+i) \\ a = -\frac{1}{4}(1+i) \end{cases}$

D'où S : $M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$

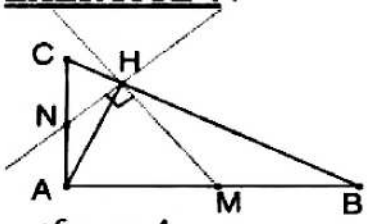
Tels que : $z' = -\frac{1}{4}(1+i).z + \frac{1}{2}(1+i)$

b) Soit Ω : le centre de S ; $S_{(\Omega)} = \Omega$

$\Rightarrow z_\Omega = -\frac{1}{4}(1+i).z_\Omega + \frac{1}{2}(1+i)$

$\Longrightarrow z_\Omega = \frac{2}{13}(3+2i)$

EXERCICE 4 :



1) $\begin{cases} f_{(B)} = A \\ f_{(A)} = C \end{cases}$

f est de rapport k=$\frac{AC}{AB}$ d'angle

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \pi(2\pi)$

$= \frac{\pi}{2} + \pi(2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

Soit w son centre

- f(B)=A $\Longrightarrow$ w appartenant à (C_1) : cercle de diamètre $[BA]$(car f est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$.)
- f(A)=C $\Longrightarrow$ $w \in (C_2)$: cercle de diamètre $[AC]$

  d'où $w \in (C_1) \cap (C_2) = \{A, H\}$

  et Comme f(A)≠A alors w=H

Conclusion :

f de rapport $\frac{AC}{AB}$ d'angle $-\frac{\pi}{2}$ de centre H.

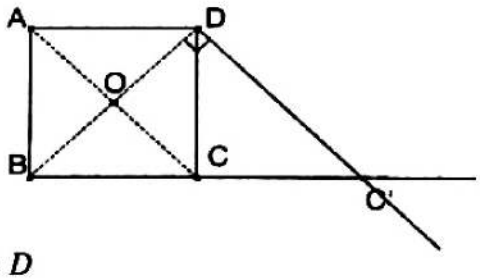
2) $f_{(M)} = N$

$\Longrightarrow \overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{HN}$

$\Longrightarrow$ H ∈ Cercle de diamètre $[MN]$

de même : A ∈ cercle de diamètre $[MN]$.

EXERCICE 5 :



$\begin{cases} S_{(D)} = D \\ S_{(O)} = C \end{cases}$

1) $\frac{DC}{Do} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

$(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

S est de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$

2) S(A)=B car $\begin{cases} DB = \sqrt{2}\,DA \\ (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

3) soit $C' = S_{(C)}$

O=A*C $\Longrightarrow$ S(O)=S(A)*S(C)

$\Longrightarrow$ C=B*C'

$\Longrightarrow$ C'=S_C (B)

EXERCICE 6:

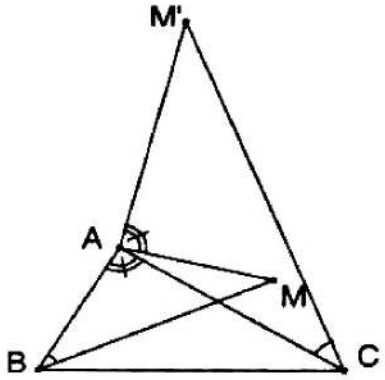
1) M ∉ (AB)

S Conserve les mesures des angles orientés d'où

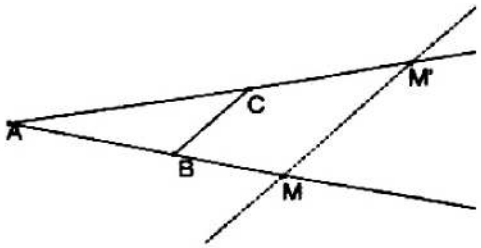
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM'})\ (2\pi)$

Et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})\ (2\pi)$

Voir figure:

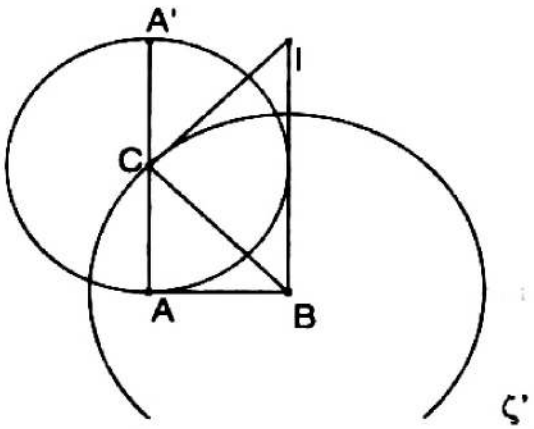


2) M∈ (AB)\ $\{A, B\}$



(MM') // (BC) et M' ∈ (AC)

EXERCICE 7



---

1) a) $\begin{cases} S_{(A')} = C \\ S_{(C)} = B \end{cases}$

$\frac{CB}{A'C} = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

$(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ (2\pi)$

$= \frac{\pi}{4}(2\pi)$

D'où S est de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) S(AC)= S(A'C)=(BC)

2) a)

$S_{(C)}$= B $\Longleftrightarrow \begin{cases} IB = \sqrt{2}.IC \\ (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

D'après le théorème d'ELKASHI

$BC^2 = IC^2 + IB^2 - 2IB.IC.\cos\hat{I}$

$BC^2 = IC^2 + (\sqrt{2}.IC)^2 - 2(\sqrt{2}).IC^2.\cos\frac{\pi}{4}$

$\Longrightarrow BC^2 = IC^2 + 2IC^2 - 2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.IC^2$

$\Longrightarrow BC^2 = IC^2 + 2IC^2 - 2IC^2 \Rightarrow CB = CI$

Or $C\hat{I}B = \frac{\pi}{4}$

D'où $C\hat{B}I = \frac{\pi}{4}$ Par suite $I\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$

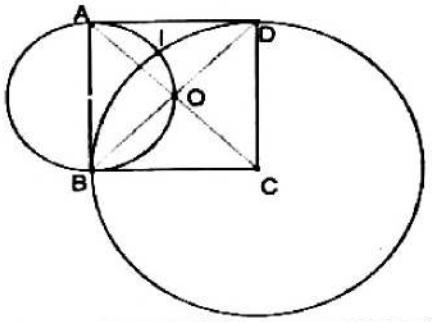
Conclusion : le triangle ICB est rectangle et isocèle en C

b) ICB isocèle rectangle en C et direct

(C) : le cercle de centre C passant par A'

D'où son image pour S est le cercle de centre $S_{(C)} = B$ et passant par $S_{(A')}$=C.

EXERCICE 8



1) a) $\begin{cases} S_{(A)} = o \\ S_{(B)} = D \end{cases}$

$\frac{OD}{AB} = \frac{Ao}{AB} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{Bo})\ (2\pi)$

$= (\overrightarrow{BA},\widehat{\ }\overrightarrow{Bo}) + \pi\ (2\pi)$

$= -\frac{\pi}{4} + \pi\ (2\pi)$

$= \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

D'où S est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{4}$

b) Soit I son centre

$S_{(B)} = D \Longleftrightarrow (\overrightarrow{IB},\widehat{\ }\overrightarrow{ID}) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$\Longleftrightarrow$ I$\in$ l'arc $[\overset{\frown}{DB}]$ du cercle de centre C et passant par B

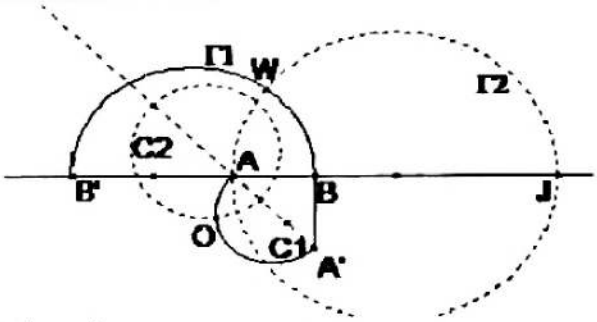
De même S(A)=O $\Longleftrightarrow$ I$\in$ l'arc $[\overset{\frown}{OA}]$ du cercle de diamètre [AB]

c) soit D'= $S_{(D)}$ le triangle ABD est rectangle et isocèle en A de sens direct d'où son image ODD' est rectangle et isocèle en S(A)=0 et direct $\Longleftrightarrow$ D'=A

Par suite $S(D) = A$

2) ABD est direct d'où son image pour une similitude directe est un triangle de sens direct comme ODC est indirect Alors il n'existe aucune similitude directe f tel que f(A)=O ;f(B)=D et f(D)=C.

EXERCICE 9 :



1) $h = h_{(A,-2)}$; $r = r_{(B,\frac{\pi}{2})}$

* h est une similitude directe de centre A de rapport 2 d'angle π.

* r est une similitude directe de centre B de rapport 1 d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Comme étant composée de deux similitudes directes $S = r\ o\ h$ est une similitude directe de rapport $1 \times 2 = 2$ d'angle $\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

2) $A' = r(A)$ O : le centre de S

a) $S_{(A)} = r\ o\ h_{(A)} = r_{(A)} = A'$

$S_{(A)} = A' \Longleftrightarrow \begin{cases} OA' = 2OA \\ (\overrightarrow{OA},\widehat{\ }\overrightarrow{OA'}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

b) * $(\overrightarrow{OA},\widehat{\ }\overrightarrow{OA'}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ d'où

O $\in (C_1)$: demi-cercle de diamètre $[AA']$ ne contenant pas le point B.

* $\frac{OA'}{OA} = 2$ d'où O $\in (C_2)$: cercle de diamètre $[GG']$

G : Le barycentre des points pondérés (A', 1) e (A, 2)

G' : Le barycentre des points pondérés (A', 1) et (A,-2)

$(C_1) \cap (C_2) = \{0\}$

3) B'=h(B) ; S'=hor

S' est une similitude directe de rapport 2 d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

Soit w son centre

$S'_{(B)} = h\ o\ r(B) = h(B) = B'$

S'(B)=B' $\Longleftrightarrow \begin{cases} wB' = 2wB \\ (\overrightarrow{wB},\widehat{\ }\overrightarrow{wB'}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

w $\in (\Gamma_1)$: demi-cercle de diamètre$[BB']$.

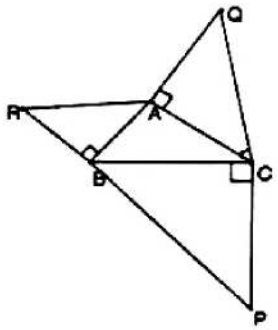
w $\in (\Gamma_2)$: Cercle de diamètre $[II']$ avec

I: b.p.p (B',1) et (B,2) $\longrightarrow$ $I = A$

I':b.p.p (B',1) et (B,-2) $\longrightarrow$ $j = S_B(B')$

$(\Gamma_1) \cap (\Gamma_2) = \{w\}$

EXERCICE 10 :



$f = S_R \circ S_P \circ S_Q$

1) $f_{(A)} = S_R \circ S_P \circ S_Q(A)$
$= S_R \circ S_P\ (C)$
$= S_R\ (B)$
$= A$

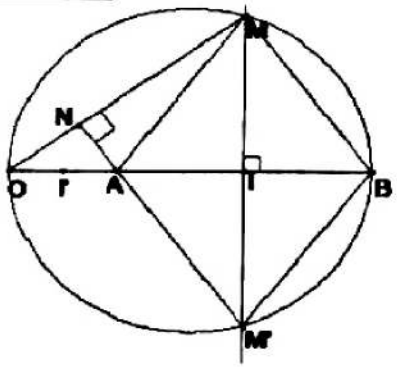
2) $f = S_R \circ (S_P \circ S_Q)$

$S_P \circ S_Q$ est une similitude directe de rapport $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

D'angle $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

D'ou f est une similitude directe de rapport $2\sqrt{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{4}$ de centre A.

EXERCICE 11 :



1) a) $S_{(AB)}(M) = M' \Longrightarrow$ I=M*M'
Or I=A*B

D'ou AMBM' est un parallélogue

M∈ med $[AB] \Longrightarrow$ MA=MB

Par suite la quadrilatère AMBM' est un losange.

b) *M est un point de (C) cercle de diamètre $[OB]$ d'où $(OM) \perp (BM)$ (1)

*A MBM' est un # $\Longrightarrow$ $(BM)//(AM')$ (2)

(1) +(2) $\Longrightarrow$ $(OM) \perp (AM')$

* (AN) ⊥(OM) et(AM') ⊥ (OM)

D'où (AN) //(AM')

Par suite A,N et M' sont soulignés

2) S: similitude directe tel Que : $\begin{cases} S(N) = N \\ S(M) = A \end{cases}$

a) $(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NA}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

d'ou S est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

b) * L'image de la droite (MI) par S est la droite passant par $S(M) = A$ et qui lui est perpendiculaire(Car S est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$)

D'où $S((MI)) = (AB)$

* De même $S((NA)) = (NM)$

c) (MI) ∩ (NA) = $\{M'\}$

d'où $S_{((MI))} \cap S_{((NA))} = \{S_{(M')}\}$

$\Longrightarrow \{S_{(M')}\} = (AB) \cap (NM)$

$\Longrightarrow S_{(M')} = O$

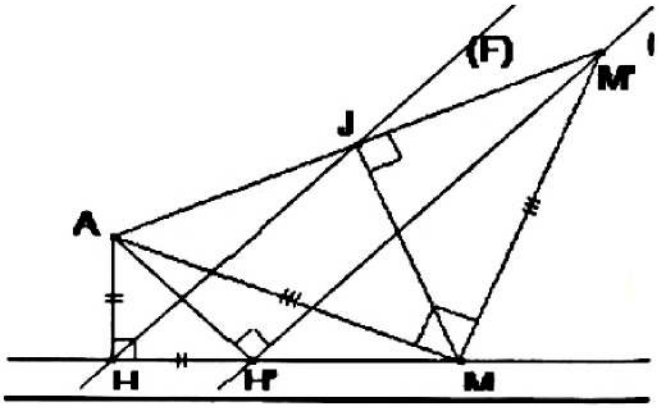
d) I= M*M' $\Longrightarrow S_{(I)} = S_{(M)} * S_{(M')}$
$\Longrightarrow$ I'=A*O

e) (NO) ⊥ (NA) d'ou N∈ (Γ) : cercle de diamètre $[OA]$

$S_{(I)} = I' \Longrightarrow (\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{NI'}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$
$\Longrightarrow$ (NI) ⊥ (NI')

D'où (NI) est tangente à (Γ) en N

EXERCICE 12 :



1) S : similitude directe de centre A tel que $S(M) = M'$

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

$AM' = \sqrt{2}.AM$

D'où S est de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$

2)M' = S(M) D'où

(E) est la droite image de (HH') par S

$S_{(H)}$=H'

(E) : la droite passant par H' et perpendiculaire à (AH')

3) AMM' est rectangle et isocèle en M et J=A*M' D'où JA=JM'=JM

et (JM)⊥(AM')

Parsuite le triangle AJM est rectangle et isocèle en J

$\Longrightarrow \frac{AJ}{AM}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AJ})=\frac{\pi}{4}(2\pi)$

4) $\begin{cases} AJ=\frac{\sqrt{2}}{2}AM \\ (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AJ})=\frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

D'où J=f(M) avec f : la similitude directe de centre A de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dangle $\frac{\pi}{4}$

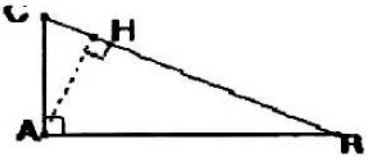
$\Longrightarrow (F)=f((HH'))$

(Ou bien : $h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}(M')=j \Rightarrow (F)=h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}(E)$)

Conclusion :

(F) est la droite passant par H et perpendiculaire à (AH')

EXERCICE 13 :



1) Soit S : la similitude directe de centre H tel que $S_{(C)}=A$

Montrons que $S_{(A)}=B$

S est d'angle $(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$

*l'image de la droite (CA) par S est la droite passant par $S_{(C)}=A$

Et qui lui est perpendiculaire

$\Longrightarrow S_{((CA))}=(AB)$

De même : $S_{((HA))}=(HB)$

(CA)∩(HA)={A}

$\Longrightarrow S_{((CA))}\cap S_{((HA))}=\{S_{(A)}\}$

$\Longrightarrow \{S_{(A)}\}=(AB)\cap(HB)$

$\Longrightarrow S_{(A)}=B$

D'où l'image du triangle CAH par S est le triangle ABH

2) soit f : la similitude indirecte de centre C tel que : $f_{(B)}=A$

Montrons que : $f_{(A)}=H$

Soit k le rapport de f $\left(k=\frac{CA}{CB}\right)$

et soit A' = f(A).

$f_o f=h_{(C,k^2)}$

$f_o f_{(B)}=f_{(A)}$=A'

$\Longrightarrow h_{(C,k^2)}(B)$=A' $\Longrightarrow$A'∈(CB) (1)

(CA) ⊥(AB) $\Longrightarrow f_{(CA)}\perp f_{(AB)}$

$\Longrightarrow$ (CA') ⊥ (AA') (2)

(1) + (2) $\Longrightarrow$ A': la projection orthogonale de A sur (BC)$\Longrightarrow$A'= H

$\Longrightarrow f_{(A)}=H$

D'ou f transforme le triangle ABC en le triangle HAC.

*Soit Δ :l'axe de f

$f_{(B)}=A$ et f de centre C $\Longrightarrow$

Δ : porte la biscentrice intérieure de $[CB,CA]$

$f=h_{(C,k)}o\ S_\Delta=S_\Delta o h_{(C,k)}$

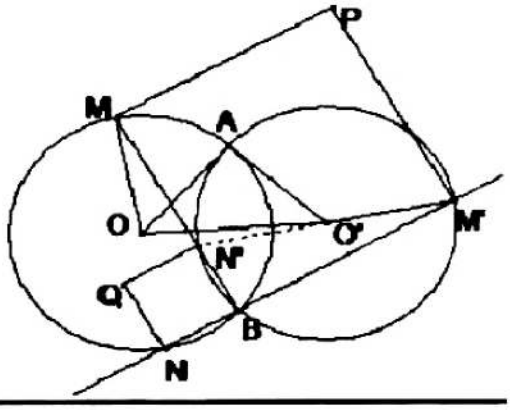
3) S o f(A)=S(H)=H

S o f(B)=S(A)=B

S o f(C)=S(C)=A

S o f transforme le triangle ABC en le triangle HBA.

EXERCICE 14:



$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$

1) soit f la similitude directe tels que : $f_{(O)}=o'$ et $f_{(M)}=M'$

f est une similitude directe de rapport $\frac{O'M'}{OM}=1$ d'angle $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$

$\Longrightarrow f$ est une rotation d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

$f_{(O)}=o'$ et on a :

$\begin{cases} Bo'=Bo \\ (Bo,\widehat{Bo'})=-\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

D'où f est de centre B $\Rightarrow f=r_{(B,-\frac{\pi}{2})}$

2) f((BM))=(BM') D'où

(BM)⊥ (BM') car f est d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

$\Longrightarrow f(BM') = (BM)$ et $f(\zeta) = \zeta'$

(BM') ∩ (ζ) = {B, N}

$\Longrightarrow (BM) \cap (\zeta') = \{f_{(B)}, f_{(N)}\}$

$= \{B, f_{(N)}\}$

D'où $f_{(N)} = N'$

$\Longrightarrow \begin{cases} BN' = BN \\ (\overrightarrow{BN}, \widehat{\ } \overrightarrow{BN'}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$

D'où BN'=BN et (BN) ⊥(BN')

3) a) $\begin{cases} BP = \sqrt{2}\, BM \\ (\overrightarrow{BM}, \widehat{\ } \overrightarrow{BP}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

D'où P=$S_{(M)}$ avec S : la similitude directe de centre B de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $-\frac{\pi}{4}$ d'où l'ensemble des points P est le cercle (Γ) image du cercle (ζ) par S.

On a $S(O) = A$ et $S(B) = B$

D'où (Γ) est le cercle de centre A passant par B

De même : $S(N) = Q \Longrightarrow$ Q ∈ (Γ)

b) B, P et Q appartiennent à (Γ)

$(\overrightarrow{BQ}, \widehat{\ } \overrightarrow{BP}) = (\overrightarrow{BQ}, \widehat{\ } \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BM}, \widehat{\ } \overrightarrow{BP})\ (2\pi)$

$= -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)(2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

$\overrightarrow{BQ} \perp \overrightarrow{BP}$

D'où B appartient au cercle de diamètre [PQ]

Comme B, P et Q ∈ (Γ)

Alors [PQ] est un diamètre de (Γ)

$\Longrightarrow$ P* Q=A $\Longrightarrow$ A∈ (PQ)

EXERCICE 15 :

F : $M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$

Avec z'=2i.z +3-i

1) $z_B = i \quad ; \quad z_C = -1$

$z_{B'} = 2i\, z_B + 3 - i = 2i\,(i) + 3 - i$

$z_{B'} = 1 - i$

$z_{C'} = -2i + 3 - i = 3 - 3i$

*$(\overrightarrow{BC}, \widehat{\ } \overrightarrow{B'C'}) = \text{Arg}\left(\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_C - z_B}\right)(2\pi)$

$= \text{Arg}\left(\frac{2-2i}{(-1)-i}\right)(2\pi)$

$= \text{Arg}\,(2i)\,(2\pi)$

$= \frac{\pi}{2}(2\pi)$

* $BC = |z_C - z_B| = |-1 - i| = \sqrt{2}$

B'C' = $|z_{C'} - z_{B'}| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$

B'C'=2BC

2)z' =2iz +3-i

|a|= |2i|=2

Arg a= Arg (2i) (2π)

$= \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\frac{b}{1-a} = \frac{3-i}{1-2i} = 1 + i$

D'ou f est la similitude directe de centre I d'affixe 1+i de rapport 2 d'angle $\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 16 :

$z_A = 3 - i$

$z_{B=2i}$

h=$h_{(A,-\sqrt{2})}$

r=$r_{\left(B,\frac{3\pi}{4}\right)}$

t=$t_{\overrightarrow{BO}}$

1) a) t o r est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Soit w son centre

t o r(B)= $t_{(B)}$=O

$\Longrightarrow \begin{cases} w\ o = wB \\ (\overrightarrow{wB}, \widehat{\ } \overrightarrow{wo}) = \frac{3\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} |z_w| = |z_w - z_B| \\ Arg\left(\frac{-z_w}{z_B - z_w}\right) = \frac{3\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \frac{-z_w}{z_B - z_w} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$

$\Longleftrightarrow -z_w = (z_B - z_w)e^{3i\frac{\pi}{4}}$

$\Longleftrightarrow -z_w = z_B . e^{3i\frac{\pi}{4}} - z_w . e^{3i\frac{\pi}{4}}$

$\Longleftrightarrow z_w = \frac{e^{3i\frac{\pi}{4}} z_B}{e^{3i\frac{\pi}{4}} - 1}$

$z_w = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2i)}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}$

$z_w = \frac{(-1+i)2i}{-1+i-\sqrt{2}}$

$$\cdot = \frac{-2-2i}{-1-\sqrt{2}+i} = \frac{2+2i}{(1+\sqrt{2})-i}$$

$$z_w = \frac{(2+2i)\left[(1+\sqrt{2})+i\right]}{(1+\sqrt{2})^2+1}$$

$$= \frac{2\,(1+\sqrt{2}+i+(1+\sqrt{2})i-1)}{4+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$$

$$z_w = (\sqrt{2}-1)+i$$

b) $f = r_{(w,\frac{3\pi}{4})} \circ h_{(A,\sqrt{2})}$

f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{3\pi}{4}+\pi = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$$f_{(A)} = r_{(w,\frac{3\pi}{4})}(A) = A'$$

Avec $z_{A'} = e^{3i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_w)+z_w$

$z_{A'} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(3-i-\sqrt{2}+1-i)+\sqrt{2}-1+i$

$z_{A'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)(4-\sqrt{2}-2i)+\sqrt{2}-1+i$

$z_{A'} = 3i\sqrt{2}$

- Soit I le centre de f

$$f_{(A)} = A' \iff \begin{cases} IA' = \sqrt{2}\,IA \\ (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\frac{z_{A'}-z_I}{z_A-z_I}\right| = \sqrt{2} \\ Arg\left(\frac{z_{A'}-z_I}{z_A-z_I}\right) = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \frac{z_{A'}-z_I}{z_A-z_I} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1\text{-}i$$

$$\iff z_{A'}-z_I = (1-i)(z_A-z_I)$$

$$\iff -iz_I = (1-i)(z_A) - z_{A'}$$

$$\iff -iz_I = (1-i)(3-i) - 3i\sqrt{2}$$

$$\iff -iz_I = 2-i(4+3\sqrt{2})$$

$$z_I = (4+3\sqrt{2})+2i$$

c) $f: M(z) \longrightarrow$ M'(z') tels que

$$z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-z_I)+z_I$$

$$z' = (1-i)z - 2 + i\,(4+3\sqrt{2})$$

2) $f_{(K)} = 0 \iff$

$$(1\text{-}i)z_K - 2 + i(4+3\sqrt{2}) = 0$$

$$z_K = \frac{6+3\sqrt{2}-i(2+3\sqrt{2})}{2}$$

EXERCICE 17:

1) $AC = |z_c - z_A| = |4+2i| = 2\sqrt{5}$

$BD = |z_D - z_B| = |-2+4i| = 2\sqrt{5}$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = Arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)(2\pi)$$

$$= Arg\left(\frac{-2+4i}{4+2i}\right)(2\pi)$$

$$= Arg(i)(2\pi)$$

$$= \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

AC=BD et AC≠0 d'où il existe un unique déplacement r tels que r(A)=B et r(C)=D

r est d'angle $\frac{\pi}{2}$

D'où r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

*soit w son centre

$$r(A)=B \begin{cases} wA = wB \\ (\overrightarrow{wA}, \overrightarrow{wB}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z_B - z_w| = |z_A - z_w| \\ Arg\left(\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}\right| = 1 \\ Arg\left(\frac{z_B-z_w}{z_A-z_w}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \frac{z_B-z_w}{z_A-z_w} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\iff z_B - z_w = i(z_A-z_w)$$

$$\iff (1\text{-}i)\,z_w = z_B - iz_A$$

$$\iff (1\text{-}i)\,z_w = 2$$

$$\iff z_w = \frac{2}{1-i} = 1+i = z_I$$

Conclusion: $\boxed{r = r_{(I,\frac{\pi}{2})}}$

2) $z_j = 3 + 5i$

$r' = r_{(J,-\frac{\pi}{2})}$

$JA = |z_A - z_j| = |-1 - 4i| = \sqrt{17}$

$JD = |z_D - z_j| = |-4 + i| = \sqrt{17}$

D'où JA=JD (1)

$(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JD}) = \text{Arg}\left(\frac{z_D - z_J}{z_A - z_j}\right)(2\pi)$

$= \text{Arg}\left(\frac{-4+i}{-1-4i}\right)(2\pi)$

$= \text{Arg}(-i)\ (2\pi)$

$(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JD}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ (2)

(1)+(2) → $r'(A) = D$

De même: $r'(C) = B$

3) $z_I = 1 + i$

M=A*C ⟶ $z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = 4+2i$

N=B*D ⟶ $z_N = 4i$

*Aff$(\overrightarrow{IM}) = z_M - z_I = 3 + i$

Aff $(\overrightarrow{NJ}) = z_J - z_N = 3 + i$

D'où $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NJ}$ Par suite

IMJN est un parallélogramme. (1)

*$IM = |z_M - z_I| = \sqrt{10}$

$IN = |z_J - z_N| = \sqrt{10}$

D'où IM=IN (2)

* $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IN}) \equiv Arg\left(\frac{z_N - z_I}{z_M - z_I}\right)\ (2\pi)$

$\equiv Arg\left(\frac{-1+3i}{3+i}\right)\ (2\pi)$

$\equiv Arg(i)\ (2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ (3)

(1) +(2) +(3) ⟹ IMJN est un carré

4) a/• IAPB carré

⇒ aff $(\overrightarrow{AP})$=aff$(\overrightarrow{IB})$

⇒ $z_P - z_A = z_B - z_I$ ⇒ $z_P = z_B - z_I + z_A$

⇒ $\boxed{z_P = 2+2i}$

•ICQD carré ⇒ aff $(\overrightarrow{CQ})$=aff$(\overrightarrow{ID})$

⇒ $z_Q - z_C = z_D - z_I$ ⇒ $z_Q = z_D - z_I + z_C$

⇒ $\boxed{z_Q = 4+8i}$

b/

$\frac{IP}{IA} = \frac{|Z_P - Z_I|}{|Z_A - Z_I|} = \frac{|1+i|}{|1|} = \sqrt{2}$

$\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IP}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ *car IAPB est un carré direct*

$\frac{IQ}{IC} = \sqrt{2}$

$\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IQ}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

g est la similitude directe de centre I de rapport $\sqrt{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$

c/ d'après 3) IMJN est un carré direct

d'où $IJ = \sqrt{2}IM$ *et* $\left(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IJ}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

⇒g(M)=J

M=A*C⇒g(M)=g(A)*g(C)

⇒ J= P*Q

EX 18:

1) $k=B*C \Rightarrow z_k=\frac{z_B+z_C}{2}$

$\Rightarrow k=\frac{b+c}{2}$

• $r_{(A,\frac{\pi}{2})}(C)=C' \Rightarrow z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_A)+z_A$

$\Rightarrow c'=i(c-0)+0 \Rightarrow c'=i.c$

• $r_{(A,-\frac{\pi}{2})}(B)=B' \Rightarrow b'=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-0)+0$

$\Rightarrow b'=-i.b$

2) $AK \neq 0$ et $B'C' \neq 0$ d'où il existe une unique similitude directe f tels que :

$f(A)=B'$ et $f(K)=C'$

3) a) $f : M(z) \mapsto M'(z')$

tel que : $z'=\alpha.z+\beta \qquad (\alpha,\beta) \in \square^2$

$f(A)=B' \Rightarrow z_{B'}=\alpha.z_A+\beta \Rightarrow \beta=b' \Rightarrow \beta=-i.b$

$f(K)=C' \Rightarrow c'=\alpha.k+\beta \Rightarrow \alpha.k=ic+ib$

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{b+c}{2}\right)=i(b+c) \Rightarrow \alpha=2i$

la forme complexe de f :

$z'=2i.z-i.b$

$|2i|=2$, $Arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

$\frac{-ib}{1-2i}=(2-i)\frac{b}{5}$

f est la similitude directe de centre ω d'affixe $(2-i)\frac{b}{5}$

de rapport 2 d'angle $\frac{\pi}{2}$

$f=h_{(\omega,2)} \circ r_{(\omega,\frac{\pi}{2})}=r \circ h$

b) $f(A)=B'$ et $f(K)=C' \Rightarrow \left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{B'C'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

d'où $(AK) \perp (B'C')$

EX19 :

1) • $1+\frac{1}{\varphi}=1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}=1+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1}$

$=1+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$

• $\frac{CF}{CD}=\frac{BC-BF}{CD}=\frac{BC}{CD}-\frac{BF}{CD}=\varphi-\frac{AB}{CD}$

$=\varphi-1=\frac{1}{\varphi}$ d'où $\frac{CD}{CF}=\varphi$

2) $\begin{cases} f(A)=D \\ f(D)=C \end{cases}$

$\frac{DC}{AD}=\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)+\pi(2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}+\pi(2\pi) \equiv \frac{-\pi}{2}$

d'où f est de rapport $\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

3) soit C'=f(C) on a C=f(D)

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'C}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ et $CC'=\frac{1}{\varphi}.CD$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'C}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi) \\ \frac{CD}{CC'}=\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C' \in [CB) \\ \frac{CD}{CC'}=\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow$ C'=F d'où f(C)=F

4) soit Ω le centre de f .

$f \circ f$ est une similitude directe de centre Ω

de rapport $\frac{1}{\varphi^2}$ d'angle π

$\Rightarrow f \circ f$ est une homothétie de centre Ω

$f \circ f(A)=f(D)=C \Rightarrow \Omega \in (AC)$

$f \circ f(D)=f(C)=F \Rightarrow \Omega \in (DF)$

d'où $\{\Omega\}=(AC) \cap (DF) \Rightarrow \Omega=O$

d'où f est de centre O

5) f(A)=D et f(C)=F $\Rightarrow (AC) \perp (DF)$ car

f est d'angle $\frac{-\pi}{2}$

□ montrons que f(F)=G

l'image de la droite (CF) par f est la droite passant par f(C)=Fet qui lui est perpendiculaire

$\Rightarrow$ f((CF))=(FE)

□ de meme f((DF))=(CA)

$(CF) \cap (DF)=\{F\}$

$\Rightarrow (FE) \cap (CA)=\{f(F)\}$

$\Rightarrow$ f(F)=G

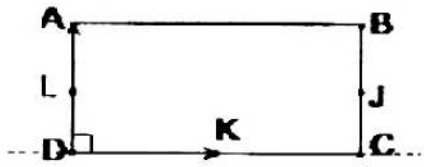
$\begin{cases} f(C)=F \\ f(F)=G \end{cases} \Rightarrow GF=\frac{1}{\varphi}.CF$

or $\frac{EF}{CF}=\varphi$

$EG=EF-GF=\varphi.CF-\frac{1}{\varphi}.CF$

$=(\varphi-\frac{1}{\varphi}).CF=1.CF = ED$

EX20 :



1) $AC \neq 0$ et $DB \neq 0$

d'où il existe une unique similitude indirecte f tels que: $f(A)=D$ et $f(C)=B$,

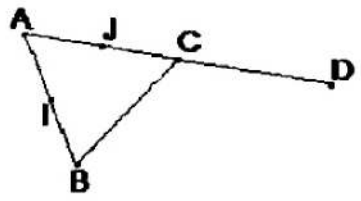
le rapport de f est $\frac{DB}{AC}=1$

$\Rightarrow$ f est un antidéplacement

$med[AD]=med[CB]=(LJ)$, d'où $f=S_{(LJ)}$

$f(L)=L$ et $f(J)=J$

EX21 :



1) $\begin{cases} f(C)=A \\ f(A)=B \end{cases}$

$f \circ f(C) = f(A) = B \Rightarrow f \circ f \neq id$

d'où f n'est pas une symétrie orthogonale

par suite f est une symétrie glissante.

soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$f \circ f=t_{2\vec{u}}$

$f \circ f(C)=B \Leftrightarrow t_{2\vec{u}}(C)=B \Leftrightarrow 2\vec{u}=\overline{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{u}=\frac{1}{2}\overline{CB} \Leftrightarrow \vec{u}=\overline{JI}$

$f(C)=A \Rightarrow C * A=J \in \Delta$

$f(A)=B \Rightarrow A * B=I \in \Delta$

d'où $\Delta=(IJ)$

2) $\begin{cases} g(B)=D \\ g(I)=C \end{cases}$

$I=B * A \Rightarrow g(I)=g(B) * g(A) \Rightarrow C=D * g(A)$

$\Rightarrow g(A)=S_C(D)=A$ d'où $g(A)=A$

g est de rapport $\frac{AC}{AI}=\frac{AB}{AI}=2$, d'angle $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$, de centre A

3) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KI}=\vec{0}$

a) Comme étant composée d'une similitude indirectede rapport 1 et d'une similitude directe de rapport 2 :

$f \circ g$ est une similitude indirecte de rapport 2

b) $f \circ g(I)=f(C)=A$

$f \circ g(A)=f(A)=B$

c) $\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KA}=(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IA})$

$=(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KI})+(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{IA})=\vec{0}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})$

$=\vec{0}$ car $I=A * B$

soit $f \circ g(K)=K'$, on a aussi

$f \circ g(I)=A$ et $f \circ g(A)=B$

$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KI}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{K'B}+2\overrightarrow{K'A}=\vec{0}$ car f conserve le barycentre

d'où $\overrightarrow{K'B}+2\overrightarrow{K'A}=\vec{0}$ or on a $\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KA}=\vec{0}$

d'où $K'=K$ par suite $f \circ g(K)=K$

d) $f \circ g$ est de rapport 2 . (d'aprés 3) a))

e) $f \circ g(K)=K$ d'où $f \circ g$ est une similitude indirecte de rapport 2 de centre K.

soit Δ son axe

$f(A)=B$, d'où Δ porte la bissectrice intérieure de $\left[\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}\right]$ or $K \in [AB]$

d'où Δ est la perpendiculaire à (AB) en K.

EX 22 :

$f : M(z) \mapsto M'(z')$

tq : z'=(1+i).$\bar{z}$+i

f est de rapport $|1+i|=\sqrt{2}$ de centre I d'affixe :

$$z_I=\frac{(1+i).\bar{i}+i}{1-|1+i|^2}=\frac{-i(1+i)+i}{1-2}=i(1+i)-i=i-1-i$$

$z_I=-1$

soit Δ son axe.

$$\Delta=\left\{M(z)/\overline{IM'}=\sqrt{2}\,\overline{IM}\right\}$$

$\overline{IM'}=\sqrt{2}.\overline{IM} \Leftrightarrow z'+1=\sqrt{2}.(z+1)$

$\Leftrightarrow (1+i).\bar{z}+i+1=\sqrt{2}(z+1)$, on pose z=x+iy

$\Leftrightarrow (1+i)(x-iy)+1+i=\sqrt{2}(x+iy+1)$

$\Leftrightarrow (x+y+1)+i(x-y+1)=(\sqrt{2}.x+\sqrt{2})+i\sqrt{2}.y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=\sqrt{2}.x+\sqrt{2} \\ x-y+1=\sqrt{2}.y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x-(1+\sqrt{2})y+1=0$

d'où Δ est la droite d'équation : x-(1+$\sqrt{2}$)y+1=0

EX 23 :

$z'=-5i.\bar{z}+1+i$

1) f est de rapport $|-5i|=5$ de centre J d'affixe :

$$z_J=\frac{-5i(\overline{1+i})+1+i}{1-|-5i|^2}=\frac{1+i}{6}$$

soit Δ son axe

$$\Delta=\left\{M(z)/\overline{JM'}=5\overline{JM}\right\}$$, soit z=x+iy

$$\overline{JM'}=5\overline{JM} \Leftrightarrow z'-\frac{1+i}{6}=5.(z-\frac{1+i}{6})$$

$$\Leftrightarrow 6z'-1-i=5(6z-1-i)$$

$\Leftrightarrow 6.[-5i.\bar{z}+1+i]-1-i=30z-5-5i$

$\Leftrightarrow -30i.\bar{z}+6+6i-1-i=30z-5-5i$

$\Leftrightarrow 30(z+i.\bar{z})=10+10i \Leftrightarrow 3[x+iy+ix+y]=1+i$

$\Leftrightarrow 3(x+y)+3i.(x+y)=1+i \Leftrightarrow 3(x+y)=1$

$\Leftrightarrow 3x+3y-1=0$

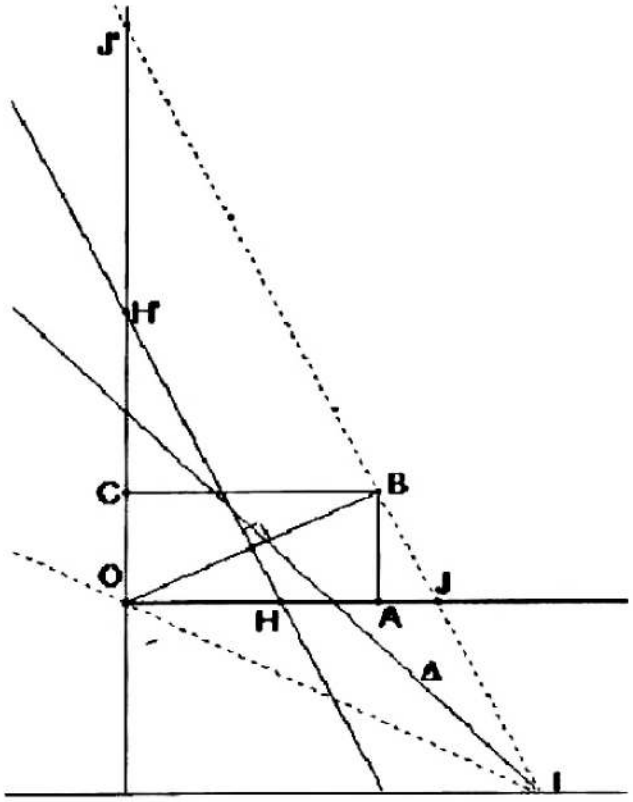
d'où Δ: 3x+3y-1=0

2) soit I'=f(I)

$z_{I'}=-5.i.\bar{z}_I+1+i=-5i(3-i)+1+i=-4-14i$

$f(\zeta)=(\zeta')$ avec (ζ') est le cercle de centre I' de rayon $5\sqrt{5}$

EX 24 :



1) a) dans le triangle OBJ on a : H=O * J

HO=HB car H ∈ D , d'où HO=HB=HJ

$\Rightarrow$ H : le centre du cercle (ζ) circonscrit au triangleOBJ

H=O * J $\Rightarrow [OJ]$ diamétre de (ζ)

d'où OBJ est rectangle en B

de meme : OBJ' est rectangle en B

b) (BJ') $\perp$ (BO) et(BJ) $\perp$ (BO)

$\Rightarrow (BJ')//(BJ)$ d'où B,J et J' sont alignés

2) $\begin{cases} f(J)=O \\ f(O)=J' \end{cases}$

a) f est d'angle $\left(\overline{JO},\overline{OJ'}\right) \equiv \left(\overline{OJ},\overline{OJ'}\right)+\pi(2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}+\pi(2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

b) l'image de la droite (BJ) par f est la droite passant par f(J)=O et qui lui est $\perp$

$\Rightarrow$ $f\left((BJ)\right)=(OB)$

de meme $f\left((BO)\right)=(BJ')$

$(BJ)\cap(BO)=\{B\} \Rightarrow (OB)\cap(BJ')=\{f(B)\}$

$\Rightarrow f(B)=B$

f est de rapport $\frac{BO}{BJ}=\cot g\widehat{BOJ}=\cot g\widehat{BOA}$

$=\frac{OA}{AB}=2$

de centre B

3) $\begin{cases} g(J)=O \\ g(O)=J' \end{cases}$

a) g est de rapport $\frac{OJ'}{OJ}=2$ car f(J)=Oet f(O)=J'

b) g est de rapport différent de 1 , d'où g admet un unique point invariant I

c) $g\circ g(J)=g(O)=J'$

$g\circ g=h_{(I,4)}$

$g\circ g(J)=J' \Rightarrow h_{(I,4)}(J)=J' \Rightarrow I\in(JJ')$

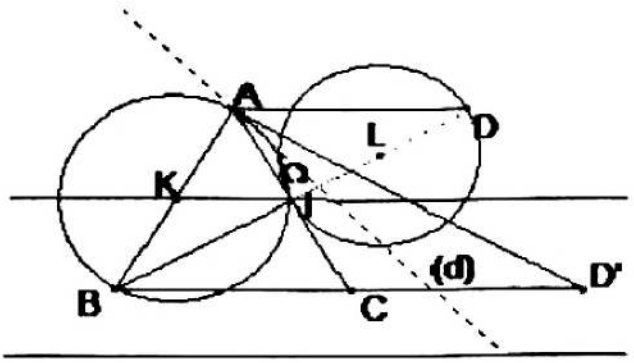
d) $h_{(I,4)}(J)=J' \Leftrightarrow \overline{IJ'}=4\overline{IJ} \Leftrightarrow 4\overline{IJ}-\overline{IJ'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overline{JI}=\frac{-1}{3}\overline{JJ'}$ (voir figure)

□soit Δ son axe

$g(I)=O \Rightarrow \Delta$ porte la bissectrice intérieure de $\left[\overline{IJ},\overline{IO}\right]$

EX 25 :



1) a) BA=AC et BA $\neq$ 0 d'où il existe un unique antidéplacement f tels que : f(B)=A et f(A)=C

b) $f\circ f(B)=f(A)=C\neq B$

$f\circ f\neq id \Rightarrow$ f n'est pas une symétrie ortogonale par suite f est une symétrie glissante.

□soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe

$f\circ f=t_{2\vec{u}}$

$f\circ f(B)=C \Rightarrow 2\vec{u}=\overline{BC} \Rightarrow \vec{u}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{KI}$

□$f(B)=A \Rightarrow K=A*B\in\Delta$

$f(A)=C \Rightarrow I=A*C\in\Delta$

d'où Δ=(IK)

c) soit C'=f(C)

$f\circ f=t_{\overline{BC}}$

$f\circ f(A)=f(C)=C' \Rightarrow t_{\overline{BC}}(A)=C'$

$\Rightarrow \overline{AC'}=\overline{BC} \Rightarrow \overline{AC'}=\overline{AD}$ car ABCD est un parallélogramme

$\Rightarrow$ C'=D d'où f(C)=D

d) D'=f(D) $\Rightarrow f\circ f(C)=D' \Rightarrow t_{\overline{BC}}(C)=D'$

$\Rightarrow \overline{BC}=\overline{CD'} \Rightarrow C=B*D' \Rightarrow D'=S_C(B)$

2) $\begin{cases} S(A)=B \\ S(I)=D \end{cases}$

$\frac{BD}{AI}=2\frac{BI}{AI}=2.\cot g\widehat{ABI}=2\cot g\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$

$\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}\right)(2\pi)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$

d'où S est de rapport $2.\sqrt{3}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) (ζ) est de centre K

(ζ') de centre I * D=L

K,I et L ne sont pa alignés et $I\in(\zeta)\cap(\zeta')$

d'où (ζ) et (ζ') ne sont pa tangents en I

par suite (ζ)et(ζ') se recoupent en un 2ème point Ω

soit ω : le centre de S

$S(A)=B\Rightarrow\left(\overrightarrow{\omega A},\overrightarrow{\omega B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Rightarrow\omega\in(\zeta)$

$S(I)=D\Rightarrow\omega\in(\zeta')$

$\omega\in(\zeta)\cap(\zeta')\Rightarrow\omega\in\{I,\Omega\}$

$S(I)\neq I\Rightarrow\omega\neq I$ d'où $\omega=\Omega$

S est de centre Ω

3) g=f ∘ S

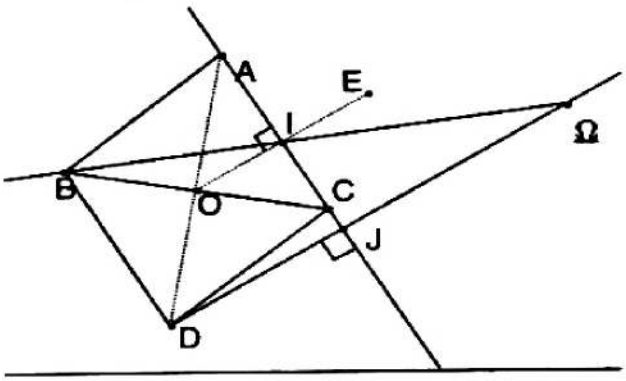
g similitude indirecte de rapport $1\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

g(A)=f ∘ S(A)=f(B)=A , g de centre A

g(I)=f ∘ S(I)=f(D)=D' ,

l'axe de g est la droite (d) qui porte la bissectrice intérieure de $\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD'}\right]$

EX 26 :



1) $\begin{cases} f(O)=I \\ f(D)=J \end{cases}$

$\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{IJ}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AI}\right)(2\pi)$

$\equiv\alpha(2\pi)$

$\frac{IJ}{OD}=\frac{AI}{AO}$ car I=A * J

$=\cos(\alpha)$

f est de rapport $\cos\alpha$ d'angle α

O=A * D ⇒ f(O)=F(A) * f(D)

⇒ I=J * f(A) ⇒ f(A)=S_I(J) ⇒ f(A)=A

2) f est de centre A.

on a : cosBAO=$\cos\alpha=\frac{AO}{AB}$

d'où AO=(cosα).AB et

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right)\equiv\alpha(2\pi)$

d'où f(B)=O

O=B * C ⇒ $f(O)=f(B)*f(C)$

⇒ $I=O*f(C)\Rightarrow f(C)=S_I(O)$

⇒ f(C)=E

$\begin{cases} f(B)=O \\ f(C)=E \end{cases}\Rightarrow\frac{OE}{BC}=\cos\alpha$

3) $\begin{cases} g(B)=O \\ g(C)=E \end{cases}$

a) g est de rapport $\frac{OE}{BC}=\cos\alpha$

O=B * C ⇒ g(O)=g(B) * g(C) ⇒ g(O)=O * E

⇒ $g(O)=I$

b) g et $S_{(OE)}$ ∘ f sont deux similitudes indirectes

$S_{(OE)}$ ∘ f(B)=$S_{(OE)}$(O)=O=g(B)

$S_{(OE)}$ ∘ f(O)=$S_{(OE)}$(I)=I=g(O)

g et $S_{(OE)}$ ∘ f coincident sur deux point distincts

d'où g=$S_{(OE)}$ ∘ f

4) a) $g(D)=S_{(OE)}\circ f(D)$

$=S_{(OE)}(J)=A$ car $(OE)=med[AJ]$

$g(A)=S_{(OE)}\circ f(D)=S_{(OE)}(A)=J$

d'où $g\circ g(D)=J$

$g\circ g=h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}$

$g\circ g(D)=J \Rightarrow h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}(D)=J \Rightarrow \Omega\in(DJ)$

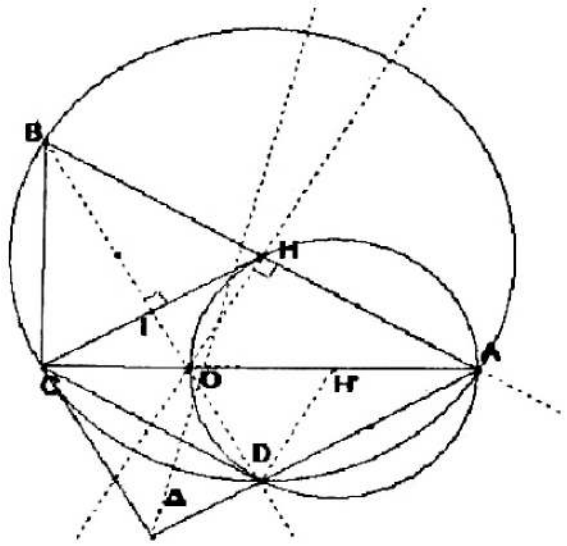
b) $g\circ g(B)=g(O)=I \Rightarrow h_{(\Omega,\cos^2\alpha)}(B)=I$

$\Rightarrow \Omega\in(BI)$

c) $\{\Omega\}=(DJ)\cap(BI)$

EX 27 :

1) a)



b) $[BO)$: bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$

et $\widehat{ABC}\equiv\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\widehat{OBA}=\frac{\pi}{6}}$ (1)

$\widehat{BCA}+\widehat{CBA}+\widehat{BAC}=\pi \Rightarrow \pi+\frac{\pi}{3}+\widehat{BAO}=\pi$

$\Rightarrow \boxed{\widehat{BAO}=\frac{\pi}{6}}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ le triangle OBA est isocéle en O

$(OH)\perp(AB) \Rightarrow (OH)=med[AB]$

comme $H\in(AB)$ alors $H=A*B$

2) $\begin{cases} f(B)=O \\ f(H)=H' \end{cases}$

a) $\frac{OH'}{BH}=\frac{\frac{1}{2}AO}{AH}=\frac{1}{2}\frac{AO}{AH}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\widehat{A}}$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{OH'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{H'A}\right)(2\pi)$

$\equiv\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AH'}\right)(2\pi)$

$\equiv\frac{\pi}{6}(2\pi)$

d'où f est de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d'angle $\frac{\pi}{6}$

b) $H=B*A \Rightarrow f(H)=f(B)*f(A) \Rightarrow H'=O*f(A)$

$H'=O*f(A) \Rightarrow f(A)=S_H(O) \Rightarrow f(A)=A$

d'où f est de centre A

3) $D\in(\Gamma') \Rightarrow (OD)\perp(AD)$

$D\in(\Gamma) \Rightarrow (BD)\perp(AD)$

d'où $(OD)\perp(BD) \Rightarrow$ O,B et D sont alignés

b) ABC rectangle en C

$H=A*B \Rightarrow HB=HC=HA \Rightarrow HB=HC$

$\widehat{CBH}=\frac{\pi}{3}$, le triangle BCH est isocéle en H et $\widehat{B}=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \widehat{C}=\frac{\pi}{3}$ d'où BCH est équilatéral

• $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OH'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)(2\pi)\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)$ (1)

le triangle ODA est rectangle en D et $H'=O*A$

$\Rightarrow H'O=H'D$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ ODH est équilatéral

soit $C'=f(C)$ le triangle BCH est équilatéral direct

donc son image OC'H' est équilatéral direct

comme ODH' est équilatéral direct alor C'=D

par suite f(C)=D

c) soit $I=C*H$, $I\in(BO)$ car BCH est équilatéral

$[BO)$: bissectrice de $\widehat{CBH}$

on a : $(AD)\perp(OD) \Rightarrow (AD)\perp(BD)$ or $(BO)\perp(CH)$

d'où $\boxed{(AD)\perp(CH)}$ (1)

dans le triangle ABD on a : H=B * A et (AD) ⊥ (HI)

d'où AD=2HI d'où $\boxed{AD=CH}$ (2)

(1)+(2) ⇒ ADCH est un parallélogramme

or : HA=HC d'où ADCH est un losange

4) $g=S_{(DH)} \circ f$

a) $g(A)=S_{(DH)} \circ f(A)=S_{(DH)}(A)=C$

$g(C)=S_{(DH)} \circ f(C)=S_{(DH)}(D) = D$

b) comme étant la composée d'une

similitude directede rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'une

similitude indirecte de rapport 1 :

g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $g \circ g=h_{\left(\Omega,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}=h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}$

$g \circ g(A)=g(C)=D \Rightarrow h_{\left(\Omega,\frac{1}{3}\right)}(A)=D \Rightarrow \overrightarrow{\Omega D}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$

$\overrightarrow{\Omega A}-3\overrightarrow{\Omega D}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{A\Omega}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

g(A)=C

⇒ Δ porte la bissectrice interieur de $\left[\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}\right]$